MATEMATİK Sınıf-12

OGM MATERYAL
ORTAÖĞRETİM GENEL MÜDÜRLÜĞÜ

KONU BİR FONKSİYONUN BİR NOKTADAKİ LİMİTİ İLE SOLDAN VE SAĞDAN LİMİT KAVRAMLARI

TÜREV

LİMİT VE SÜREKLİLİK

Yaklaşım Kavramı:

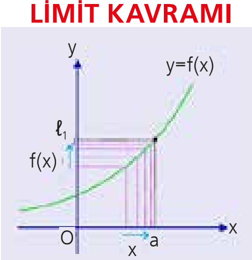
x değişkeni bir a sayısına, a dan küçük değerlerle yaklaşıyorsa bu tür yaklaşmaya **soldan yaklaşma**, a dan büyük değerlerle yaklaşıyorsa bu tür yaklaşmaya **sağdan yaklaşma** denir. x değişkeninin a sayısına soldan yaklaşması $x \to a^-$, sağdan yaklaşması $x \to a^+$ şeklinde gösterilir.

Aşağıdaki tabloda x değişkeninin 5 sayısına, 5 ten küçük ve 5 ten büyük sayılarla yaklaşması gösterilmiştir.

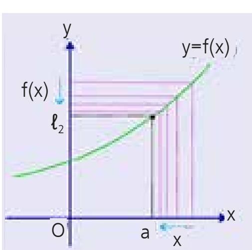
→ 5 ←

x	4,5	4,9	4,99	4,999	4,9999	...	...	5,0001	5,001	5,01	5,1	5,5

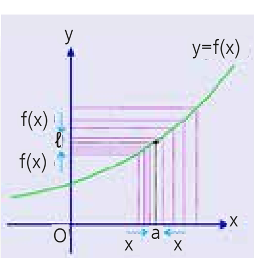
LİMİT KAVRAMI



$f(x)$ fonksiyonunun grafiği incelendiğinde x, a ya soldan yaklaşırken $f(x)$ in ℓ_1 in gerçek sayısına yaklaştığı görülmektedir. ℓ_1 gerçek sayısına $f(x)$ fonksiyonunun apsisli noktasındaki **soldan limiti** denir ve $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\ell_1$ şeklinde gösterilir.



$f(x)$ fonksiyonunun grafiği incelendiğinde x, a ya sağdan yaklaşırken $f(x)$ in ℓ_2 gerçek sayısına yaklaştığı görülmektedir. ℓ_2 gerçek sayısına $f(x)$ fonksiyonunun $x=a$ apsisli noktasındaki **sağdan limiti** denir ve $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\ell_2$ şeklinde gösterilir.



$f(x)$ fonksiyonunun grafiği incelendiğinde x, a ya soldan ve sağdan yaklaşırken $f(x)$ in ℓ gerçek sayısına yaklaştığı görülmektedir. ℓ gerçek sayısına $f(x)$ fonksiyonunun $x=a$ apsisli noktasındaki **limiti** denir ve $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$ biçiminde gösterilir.

SONUÇ:

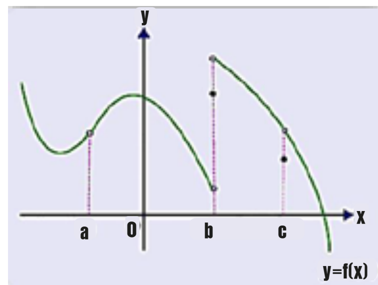
1-) Bir $f(x)$ fonksiyonunun $x=a$ apsisli noktasında limitinin olması için bu noktadaki sağdan ve soldan limitleri birbirine eşit olmalıdır.

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\ell_1$ ve $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\ell_2$ ise $\ell_1=\ell_2=\ell \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$

2-) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^+} f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)$ yoktur.

3-) Bir fonksiyonun bir noktada limitinin olması için fonksiyonun o noktada tanımlı olma zorunluluğu yoktur.

4-) Bir fonksiyonun bir noktadaki limiti, fonksiyonun o noktadaki değerinden farklı olabilir.

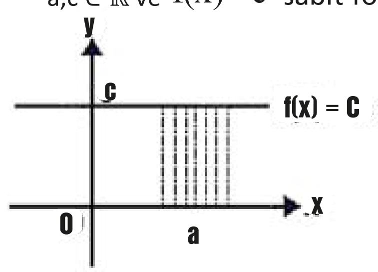


NOT: Bir fonksiyonun grafiği üzerindeki kopukluk olan noktalara **kritik noktalar** denir. $y=f(x)$ fonksiyonunun tanımlı olmadığı x=a noktası ile x=b ve x=c apsisli noktaları kritik noktalardır. Bu noktalarda limit araştırılırken sağdan ve soldan limitler incelenmelidir. Eğer limit araştırılan nokta, kritik nokta değilse fonksiyonun limiti, fonksiyonun o noktadaki değerine eşittir.

LİMİTİN ÖZELLİKLERİ VE UYGULAMALARI

ÖZELLİK 1:

a,c ∈ ℝ ve $f(x)=c$ sabit fonksiyon olmak üzere $\lim\limits_{x\to a} f(x)=c$ olur.



ÖZELLİK 2:

$f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ polinom fonksiyonu olmak üzere her c gerçek sayısı için $\lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$ olur.

PARÇALI TANIMLI FONKSİYONLARIN LİMİTİ

➢ Parçalı tanımlı fonksiyonlarda kritik noktanın dışındaki bir noktanın limiti araştırılırken o nokta fonksiyonun hangi parçasına dahilse o parçada limit araştırılır.

➢ Kritik noktada fonksiyonun kuralı değiştiğinden bu noktada limit araştırılırken sağdan ve soldan limitleri incelenmelidir.

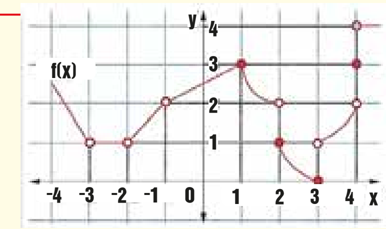
LİMİTTE BELİRSİZLİK DURUMU

Çarpanlarına ayrılabilen gerçek sayılarda tanımlı $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları için $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ ve $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ olması durumunda

$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ limitinde $\dfrac{0}{0}$ belirsizliği oluşur. Belirsizliği gidermek için pay ve payda çarpanlarına ayrılır. Pay ve paydadaki çarpanlar sadeleştirilerek belirsizlik giderilir.

SORULAR

SORU 1:



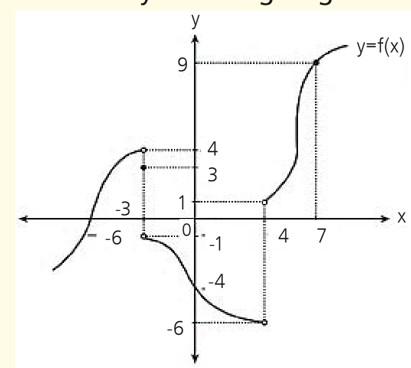
Yanda grafiği verilen y=f(x) fonksiyonunun hangi değerleri için limiti yoktur?

A) 2,-3,4 B) -2,1,3 C) -3,1,4
D) 2,3,4 E) -1,1,2

Cevap: D

SORU 2:

f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre

I. $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = 3$

II. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -6$

III. $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 4$

IV. $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = 1$

V. $\lim\limits_{x\to 7^+} f(x) = 9$

ifadelerinden kaç tanesi doğrudur?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Cevap: B

SORU 3: $f(x) = \begin{cases} ax-6, & x>3 \\ x^2+2x, & x\le 3 \end{cases}$

fonksiyonunun x=3 noktasında limiti olduğuna göre a değeri kaçtır?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Cevap: B

SORU 4: $\lim\limits_{x\to 4}\left(\sqrt[3]{x^2+3x-1} - \sqrt[4]{x+12}\right)$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

Cevap: D

SORU 5: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+2x-3}{x^2-a} = b$ **eşitliğinde b gerçek bir sayı olduğuna göre a+b toplamının değeri kaçtır?**

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

Cevap: E

SORU 6: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^3-1}{x^2+2x-3}\right)$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) $\dfrac{3}{4}$ B) 1 C) $\dfrac{5}{4}$ D) $\dfrac{3}{2}$ E) 2

Cevap: A