

KONU BİR FONKSİYONUN BİR NOKTADA VE BİR ARALIKTA TÜREVLENEBİLİRLİĞİ

TÜREV

BİR FONKSİYONUN BİR NOKTADA VE BİR ARALIKTA TÜREVLENEBİLİRLİĞİ

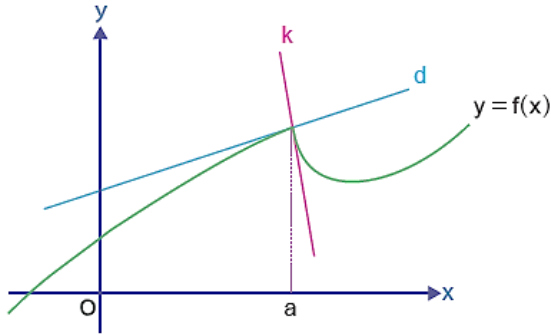
$A \subseteq \mathbb{R}$ ve $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ve $a \in A$ için f sürekli olmak üzere

f fonksiyonunun $x=a$ apsisli noktasındaki sağdan ve soldan türevleri birbirine eşit ise f fonksiyonu $x=a$ apsisli noktasında türevlenebilirdir.

$$f'(a^+) = f'(a^-) = k \Rightarrow f'(a) = k \text{ olur.}$$

Bir f fonksiyonu (a,b) ndaki her noktada türevlenebilir ise bu fonksiyon (a,b) nda türevlenebilirdir.

Aşağıda verilen $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği incelenirse a ya soldan yaklaşırken eğriye çizilen teğetin d doğrusu ve a ya sağdan yaklaşırken çizilen teğetin k doğrusu olduğu görülür.

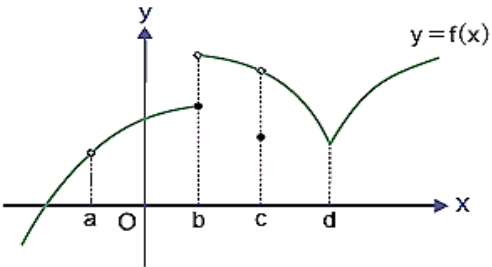


Bu durumda d doğrusunun eğimi m_d ve k doğrusunun eğimi m_k olarak ifade edilirse

$$f'(a^+) = m_k, f'(a^-) = m_d \text{ olur.}$$

Burada $m_d \neq m_k$ olduğundan fonksiyonun a noktasındaki sağdan ve soldan türevleri farklıdır. O hâlde f fonksiyonunun $x=a$ apsisli noktasında türevi yoktur. f fonksiyonunun, $x=a$ apsisli noktasında sürekli olmasına rağmen bu noktada türevi yoktur. Bu tür noktalara fonksiyonun **kırılma noktası** denir.

Aşağıda verilen $\mathbb{R} - \{a\}$ kümesinde tanımlı $f(x)$ fonksiyonunun grafiğini inceleyelim.



1) f fonksiyonu tanımlı olduğu aralıkta b ve c apsisli noktalarda süreksizdir. Bir fonksiyonun bir noktadaki türevi fonksiyonun grafiğine o noktasında çizilen teğetin eğimine eşit olduğundan fonksiyonun b ve c noktalarında türevi yoktur.

2) f fonksiyonunun d apsisli noktası fonksiyonun kırılma noktası olduğundan fonksiyonun bu noktada da türevi yoktur.

SONUÇ:

- 1) Bir fonksiyon bir $x=a$ apsisli noktada sürekli değilse $x=a$ apsisli noktada türevli de değildir.
- 2) Bir fonksiyon türevli olduğu her noktasında süreklidir.
- 3) Bir fonksiyonun kırılma noktalarında türevi yoktur.

İKİ FONKSİYONUN TOPLAMININ VE FARKININ TÜREVİ

$f(x)$ ve $g(x)$ türevlenebilir iki fonksiyon olmak üzere;

$$1) \frac{d}{dx}((f+g)(x)) = (f(x)+g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$2) \frac{d}{dx}((f-g)(x)) = (f(x)-g(x))' = f'(x) - g'(x)$$

olur.

İKİ FONKSİYONUN ÇARPIMININ VE BÖLÜMÜNÜN TÜREVİ

$f(x)$ ve $g(x)$ türevlenebilir iki fonksiyon olmak üzere;

$$1) \frac{d}{dx}((f \cdot g)(x)) = (f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$$

$$2) \frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{[g(x)]^2}$$

$(g(x) \neq 0)$ olur.

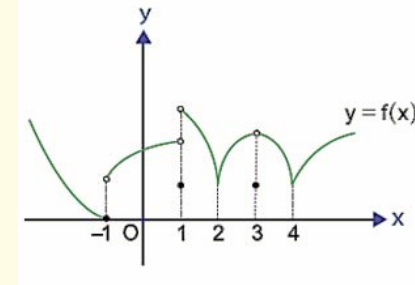
İKİ FONKSİYONUN BİLEŞKESİNİN TÜREVİ

$f(x)$ fonksiyonu X noktasında türevli, $g(x)$ fonksiyonu $f(x)$ noktasında türevli ise $g \circ f(x)$ fonksiyonu X noktasında türevlidir ve $(g \circ f)'(x) = (g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ olur.

$\frac{dy}{dx}$ türevi $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ biçiminde yazılır. Bu kurala zincir kuralı denir.

SORULAR

SORU 1:



Yanda $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre $f(x)$ fonksiyonunun sürekli olduğu hâlde türevli olmadığı noktaların

apsisleri toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 0 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

Cevap E

SORU 2: $f(x) = (x^2 + 1) \cdot \sqrt{x+1}$ olduğuna göre $f'(0)$ değeri kaçtır?

- A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) $\frac{5}{2}$

Cevap A

SORU 3: $f(x) = \frac{3x-k}{2x+1}$ fonksiyonu için $f'(-1)=7$

olduğuna göre k değeri kaçtır?

- A) 10 B) 8 C) 6 D) 4 E) 2

Cevap E

SORU 4:

$f(2x+3)=x^3-3x^2+6x-2$ ve $g(x-1)=3x-1$ olduğuna göre $(f \circ g)'(3)$ ifadesinin değeri kaçtır?

- A) 45 B) 42 C) 36 D) 24 E) 20

Cevap A

SORU 5:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2x + 3, & x < 2 \text{ ise} \\ bx + 1, & x \geq 2 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu gerçak sayılar kümesinde türevli olduğuna göre $a+b$ toplamının değeri kaçtır?

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{5}{2}$ D) $\frac{7}{2}$ E) $\frac{9}{2}$

Cevap E

SORU 6:

$f(x) = \begin{cases} ax + b, & x < 1 \text{ ise} \\ 4, & x = 1 \text{ ise} \\ x - c, & x > 1 \text{ ise} \end{cases}$ fonksiyonu apsisli 1 olan noktada türevli olduğuna göre $b+c$ toplamının değeri kaçtır?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Cevap A