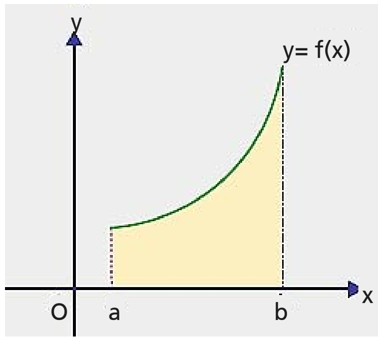
MATEMATİK Sınıf-12

OGM MATERYAL
ORTAÖĞRETİM GENEL MÜDÜRLÜĞÜ

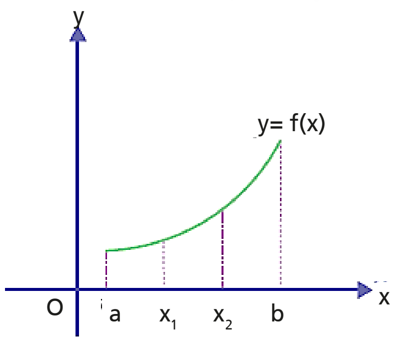
KONU RIEMANN TOPLAMI

BİR FONKSİYONUN GRAFİĞİ İLE x EKSENİ ARASINDA KALAN SINIRLI BÖLGENİN ALANININ RIEMANN TOPLAMI YARDIMIYLA YAKLAŞIK OLARAK HESAPLANMASI

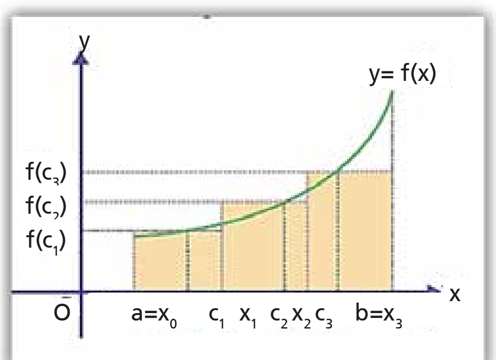
Aşağıda [a,b] nda tanımlı y= f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



[a,b] nda y=f(x) eğrisi ile x ekseni arasında kalan bölgenin alanı Alman matematikçi Bernhard Riemann (Bernard Riman) tarafından hesaplanmıştır.

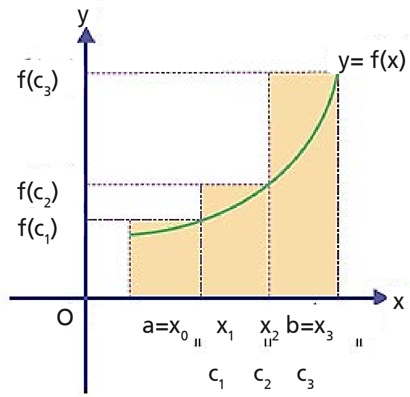


[a,b] nda $\alpha<x_1<x_2<b$ olmak üzere $\alpha=x_0$ ve $b=x_3$ seçilerek oluşturulan $P=\{x_0,x_1,x_2,x_3\}$ kümesine [a,b] nın bir **bölüntüsü** denir. (Bu bölüntü eşit aralıklarla olmak zorunda değildir.) Eğer [a,b], n tane eşit alt aralığa bölünecek olursa ortak genişlik $\Delta x=\frac{b-a}{n}$ olur.



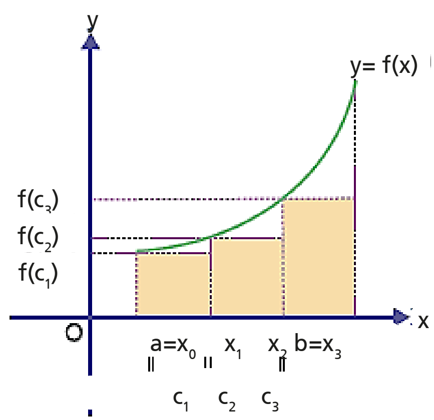
Grafikte oluşan boyalı dikdörtgenlerin toplam alanını veren $\Delta x_1.f(c_1)+\Delta x_2.f(c_2)+\Delta x_3.f(c_3)$ toplamına f(x) fonksiyonunun [a,b]na ait bir **Riemann toplamı** denir. Burada [a,b], 3 alt aralığa ayrılmıştır.

RIEMANN ÜST TOPLAMI



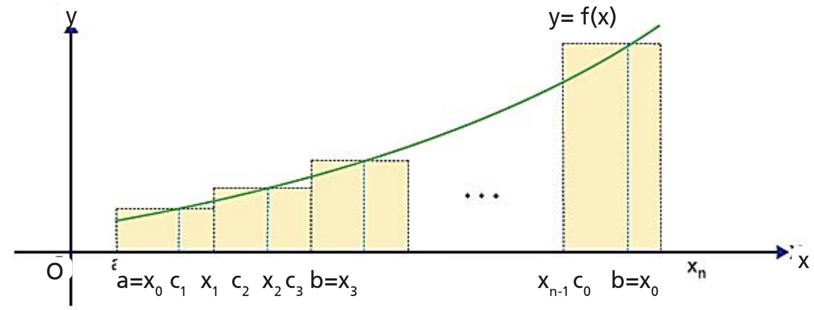
Grafikteki eğrinin üzerinde oluşan boyalı dikdörtgenlerin toplam alanını veren $\Delta x_1.f(c_1)+\Delta x_2.f(c_2)+\Delta x_3.f(c_3)$ toplamına f(x) fonksiyonunun [a,b]na ait bir **Riemann üst toplamı** denir. Eğer "[a,b]" daha fazla alt aralığa ayrılırsa bulunan Riemann üst toplamının değeri, eğrinin altında kalan alanın değerine daha yakın olur.

RIEMANN ALT TOPLAMI



Grafikteki eğrinin altında oluşan boyalı dikdörtgenlerin toplam alanını veren $\Delta x_1.f(c_1)+\Delta x_2.f(c_2)+\Delta x_3.f(c_3)$ toplamına f(x) fonksiyonunun [a,b]na ait bir **Riemann alt toplamı** denir. Eğer [a,b]daha fazla alt aralığa ayrılırsa bulunan Riemann alt toplamının değeri, eğrinin altında kalan alanın değerine daha yakın olur.

SONUÇ



$\Delta x=\frac{b-a}{n}$ olmak üzere [a,b]nda hesaplanan Riemann toplamı A ise y=f(x) eğrisinin altında kalan alan yaklaşık olarak

$A=\Delta x.f(c_1)+\Delta x.f(c_2)+\Delta x.f(c_3)+ ...+\Delta x.f(c_n)=\sum_{k=1}^{n}\Delta x.f(c_k)$ olarak ifade edilir. Buna göre Riemann toplamı n nin sonsuza yaklaşması durumunda y=f(x) ile x ekseni arasında kalan alanı vereceğinden bu alan $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\Delta x\cdot f(c_k)$ limiti ile hesaplanır.

Ayrıca $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\Delta x\cdot f(c_k)$ değerine f fonksiyonunun [a,b]ndaki **belirli integrali** denir.

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\Delta x\cdot f(c_k)=\int_a^b f(x)\cdot dx$ olur.

SORULAR

SORU 1:
f: [0,2] ⟶ R tanımlı f(x)=2x fonksiyonu veriliyor.
Buna göre aralığı 4 eşit parçaya bölen düzgün bir P parçalanmasına ait alt toplam kaç birimkaredir?

A) $\frac{5}{2}$ B) 3 C) $\frac{5}{2}$
D) 4 E) $\frac{5}{2}$

SORU 2:
f: [0,3]⟶ R tanımlı f(x)=x²+2 fonksiyonu veriliyor.
Buna göre [0,3] aralığını 3 eşit parçaya bölen düzgün bir P parçalanmasına ait üst toplam kaç birimkaredir?

A)10 B) 15 C) 20
D) 25 E) 30

SORU 3:
f:[1,3) ⟶ [1,27] olmak üzere f(x)=x³ fonksiyonunun tanımlı olduğu aralığı iki eşit parçaya bölen düzgün bir P parçalanması yapılıyor.
Buna göre Riemann alt toplamının Riemann üst toplamına oranı kaçtır?

A) $\frac{9}{35}$ B) $\frac{8}{35}$ C) $\frac{6}{35}$
D) $\frac{2}{27}$ E) $\frac{1}{27}$

SORU 4:
f: [1,4]⟶[2,5] tanımlı f(x)=x+1 fonksiyonu veriliyor.
Buna göre [1,4] aralığını 3 eşit parçaya bölen düzgün bir P parçalanmasına ait orta toplam kaç birimkaredir?

A) 6 B) $\frac{13}{2}$ C) 7
D) $\frac{19}{2}$ E) $\frac{21}{2}$

Cevaplar: 1- B, 2-C, 3- A, 4- E